2021届全国卷（Ⅰ）高考压轴卷

理科数学

第Ⅰ卷（选择题）

一. 选择题：本大题12小题，每小题5分，共60分. 在每个小题给出的四个选项中，只有一项是符号题目要求的.

1．已知集合$A=\left\{x\middle|0\le x\le 2\right\}$，集合$B=\left\{x\middle|\lg x>0\right\}$，则$A\cap B=$（　　）

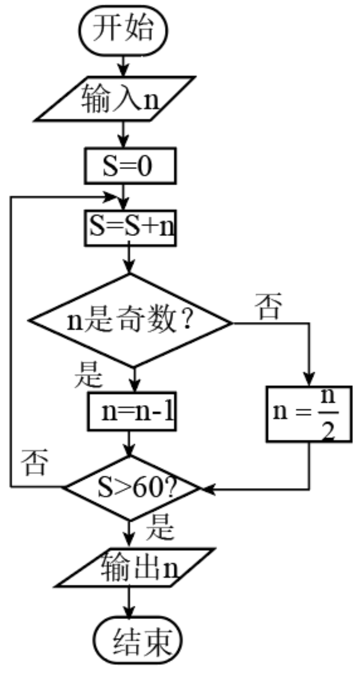
A．$\left(-\infty,1\right]\cup\left(2,+\infty\right)$　　　　B．$\left(-\infty,0\right)\cup\left(1,2\right)$

C．$\left[1,2\right)$　　　　D．$\left(1,2\right]$

2．复数满足$\left(z+i\right)i=-3+i,i$为虚数单位，则z等于（　　）

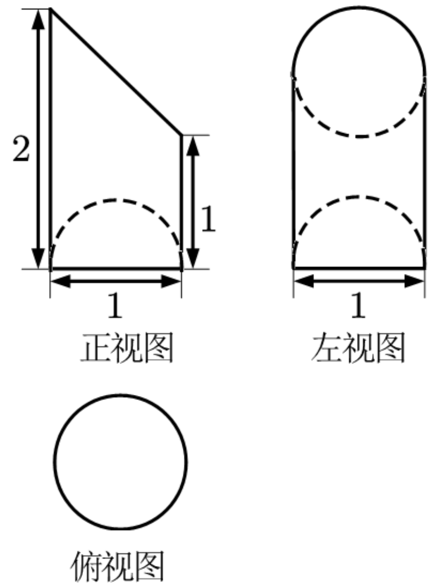
A．$1+2i$　　B．$1-2i$　　C．$-1+2i$　　D．$-1-2i$

3．执行如图所示的程序框图，若输入n的值是30，则输出的n的值是（　　）



A．2　　B．3　　C．6　　D．7

4．已知某几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积为（　）



A. $\frac{3}{8}\pi$　　B. $\frac{\pi}{4}$

C. $\frac{7}{12}\pi$　　D. $\frac{7}{24}\pi$

5．已知$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$，且$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$，则$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}=$（　　）

A. $\sqrt{3}+1$　　B. 1　　C. 2　　D. 3

6．等差数列$\{a_n\}$前n项和为S_n，$a_2+a_8+a_{11}=12$，则$S_{13}=$（　　）

A. 32　　B. 42　　C. 52　　D. 62

7．设m,n是空间中两条不同的直线，α,β,γ是空间中三个不同的平面，给出下列四个命题：

（1）若$m\perp\alpha,n//\alpha$，则$m\perp n$；

（2）若$\alpha//\beta,\beta//\gamma,m\perp\alpha$，则$m\perp\gamma$；

（3）若$m//\alpha,n//\alpha$，则$m//n$；

（4）$\alpha\perp\beta,\beta\perp\gamma$，则$\alpha//\beta$.

其中正确命题的序号是（　　）

A.（1）（2）　　B.（2）（3）　　C.（3）（4）　　D.（1）（4）

8．将甲、乙等4名交警随机分配到两个不同路口疏导交通，每个路口两人，则甲和乙不在同一路口的概率为（　　）

A. $\dfrac{1}{2}$　　　　B. $\dfrac{1}{3}$　　　　C. $\dfrac{2}{3}$　　　　D. $\dfrac{1}{4}$

9．已知实数x,y满足$\begin{cases} kx-y+k-1\geqslant 0 \\ x-1\leq 0 \\ y+1\geqslant 0 \end{cases}$，若$z=2x+y$的最大值为8，则$k$的值为（　　）

A. $\dfrac{3}{2}$　　　　B. $\dfrac{7}{2}$　　　　C. 1　　　　D. 3

10．P为双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,\ b>0\right)$左支上一点，$F_1$，$F_2$，为其左右焦点，若$\dfrac{\left|PF_2\right|^2}{\left|PF_1\right|}$的最小值为$10a$，则双曲线的离心率为（　　）

A. $4+\sqrt{5}$　　　　B. $4-\sqrt{5}$　　　　C. $4\pm\sqrt{5}$　　　　D. 4

11．已知函数$f(x)=\begin{cases} 3^{x-1}+1,(x\leq 1) \\ \left|\ln(x-1)\right|,(x>1) \end{cases}$，若$F(x)=f^2(x)-2af(x)+\dfrac{4}{3}$的零点个数为4，则实数$a$取值范围为（　　）

A. $(\dfrac{\sqrt{6}}{3},\dfrac{5}{6}]\cup(\dfrac{4}{3},+\infty)$　　　　B. $(\dfrac{\sqrt{6}}{3},\dfrac{5}{6}]\cup(2,+\infty)$

C. $[\dfrac{5}{6},2)$　　　　D. $(\dfrac{4}{3},+\infty)$

12．已知数列$\left\{a_n\right\}$的前n项和S_n，且满足$a_n+S_n=1$，则$\dfrac{S_1}{a_1}+\dfrac{S_2}{a_2}+\dfrac{S_3}{a_3}+\cdots+\dfrac{S_9}{a_9}=$（　　）

A. 1013　　　　B. 1022　　　　C. 2036　　　　D. 2037

第 II 卷（非选择题）

二、填空题（本题共 4 道小题，每小题 5 分，共 20 分）

13．在$\triangle ABC$中，角A，B，C所对应的边分别为a，b，c，已知$b\cos C+c\cos B=2b$，则$\dfrac{a}{b}=$______.

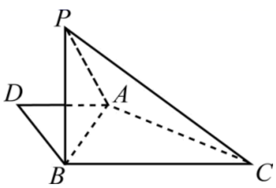
14．已知$A(m+1,-1)$，$B\left(m^2+2,m\right)$，若直线AB与斜率为2的直线平行，则m的值为____________

15．数式$1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\cdots}}$中省略号“・・・”代表无限重复，但该式是一个固定值，可以用如下方法

求得：令原式=t，则$1+\frac{1}{t}=t$，则$t^2-t-1=0$，取正值得$t=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.用类似方法可得

$\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{+\cdots}}}=$__________.

16．如图，平面四边形$ACBD$中，$AB\perp BC$，$AB=\sqrt{3}$，$BC=2$，$\triangle ABD$为等边三角形，现将$\triangle ABD$沿AB翻折，使点D移动至点P，且$PB\perp BC$，则三棱锥$P-ABC$的外接球的表面积为_____.



三、解答题（共 70 分.解答题写出文字说明、证明过程或演算步骤.地 17-21 为必做题，每个试题都必须作答.第 22、23 题为选做题，考生按要求作答）

(一).必做题

17．已知$\triangle ABC$中，角A、B、C的对边分别是a、b、c，已知$2a\cos C+c=2b$.

（1）求角A的大小；

（2）若$\triangle ABC$的面积为$\sqrt{3}$，若$\triangle ABC$的周长为 6，求三角形的边长a.

18．如图 1，在直角$\triangle ABC$中，$\angle ABC=90^\circ$，$AC=2\sqrt{3}$，$AB=\sqrt{3}$，D，E分别为AC，BD的中点，连结AE并延长交BC于点F，将$\triangle ABD$沿BD折起，使平面$ABD\perp$平面BCD，如图 2 所示.

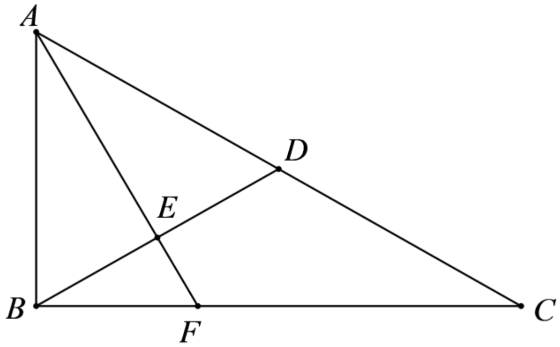


图1

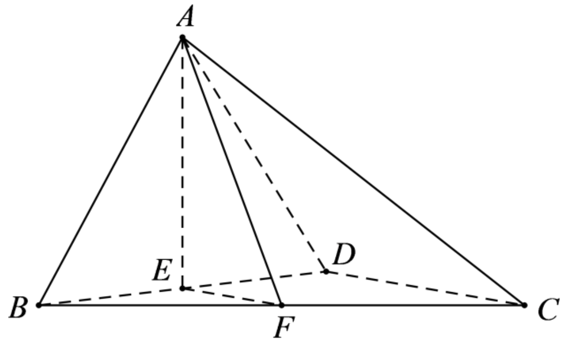


图2

（1）求证：$AE \perp CD$；

（2）求平面 AEF 与平面 ADC 所成二面角的正弦值.

19．宁夏西海固地区，在 1972 年被联合国粮食开发署确定为最不适宜人类生存的地区之一.为改善这一地区人民生活的贫困状态，上世纪 90 年代，党中央和自治区政府决定开始吊庄移民，将西海固地区的人口成批地迁移到更加适合生活的地区.为了帮助移民人口尽快脱贫，党中央作出推进东西部对口协作的战略部署，其中确定福建对口帮扶宁夏，在福建人民的帮助下，原西海固人民实现了快速脱贫，下表是对 2016 年以来近 5 年某移民村庄 100 位移民的年人均收入的统计：

年份	2016	2017	2018	2019	2020
年份代码 x	1	2	3	4	5
人均年收入 y（千元）	1.3	2.8	5.7	8.9	13.8

现要建立 y 关于 x 的回归方程，有两个不同回归模型可以选择，模型一 $\hat{y}^{(1)}=\hat{b}x+\hat{a}$；模型二 $\hat{y}^{(2)}=\hat{c}x^2+\hat{d}$，即使画出 y 关于 x 的散点图，也无法确定哪个模型拟合效果更好，现用最小二乘法

原理，已经求得模型一的方程为$\hat{y}=3.1x-2.8$.

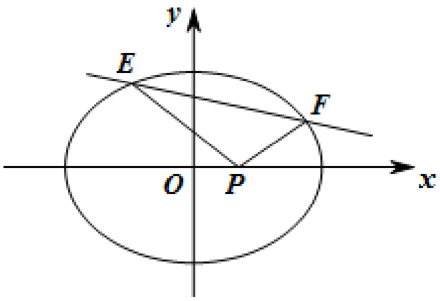
（1）请你用最小二乘法原理，结合下面的参考数据及参考公式求出模型二的方程（计算结果保留到小数点后一位）；

（2）用计算残差平方和的方法比较哪个模型拟合效果更好，已经计算出模型一的残差平方和为$\sum_{i=1}^{5}(y_i-\hat{y}_i)^2=3.7$.

附：参考数据：$\dfrac{\sum_{i=1}^{5}t_iy_i-5\overline{t}\overline{y}}{\sum_{i=1}^{5}t_i^2-5\overline{t}^2}\approx 0.52$，其中$t_i=x_i^2$，$i=1,2,3,4,5$.

参考公式：对于一组数据$\left(u_1,v_1\right)$，$\left(u_2,v_2\right)$，…，$\left(u_n,v_n\right)$，其回归直线$\hat{v}=\hat{a}+\hat{\beta}u$的斜率和截距的最小二乘法估计公式分别为$\hat{\beta}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}u_iv_i-n\overline{u}\overline{v}}{\sum_{i=1}^{n}u_i^2-n\overline{u}^2}$，$\hat{a}=\overline{v}-\hat{\beta}\overline{u}$.

20．已知焦点在x轴上的椭圆C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，短轴长为$2\sqrt{3}$，椭圆左顶点到左焦点的距离为$1$.



（1）求椭圆 C 的标准方程;

（2）如图，已知点 $P(\frac{2}{3},0)$，点 A 是椭圆的右顶点，直线 l 与椭圆 C 交于不同的两点 E,F，E,F 两点都在 x 轴上方，且 $\angle APE=\angle OPF$． 证明直线 l 过定点，并求出该定点坐标.

21．已知函数 $f\left(x\right)=x^2-4x+alnx,(a\in R,a\neq 0), f'\left(x\right)$ 为函数 $f\left(x\right)$ 的导函数.

（1）求函数 $f\left(x\right)$ 的单调区间 ;

（2）若存在实数 x_1,x_2，且 $x_1<x_2$ 使得 $f'\left(x_1\right)= f'\left(x_2\right)=0$，求证：$f\left(x_2\right)>-4$.

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计

分。

22．在平面直角坐标系xOy中，曲线C的参数方程为$\begin{cases} x=m^2+\dfrac{4}{m^2}-4 \\ y=m-\dfrac{2}{m} \end{cases}$（$m$为参数，且$m>0$），以坐标原点$O$为极点，$x$轴的正半轴为极轴建立极坐标系，直线$l$的极坐标方程为$\rho\cos\theta-3\rho\sin\theta-1=0$.

（1）写出曲线C和直线l的直角坐标方程；

（2）若直线l与x轴交点记为M，与曲线C交于P,Q两点，求$\dfrac{1}{|PM|}+\dfrac{1}{|QM|}$的值.

23．已知函数$f\left(x\right)=\left|x+\dfrac{1}{a}\right|+\left|x-a\right|(a>0)$.

（1）当$a=1$时，求不等式$f(x)\geq 4$的解集；

（2）证明：$f\left(x\right)\geq 2$.

2021新课标Ⅰ高考压轴卷 数学 word版**参考答案**

1.【答案】D

【解析】因为集合 $A=\left\{x\middle|0\le x\le 2\right\}$，集合 $B=\left\{x\middle|\lg x>0\right\}=\left\{x\middle|x>1\right\}$，因此，$A\bigcap B=\left(1,2\right]$.

故选：D.

2.【答案】A

【解析】解：$\because (z+i)i=-3+i$，

$\therefore -i\cdot i(z+i)=-i(-3+i)$，

化为 $z+i=3i+1$，

$\therefore z=2i+1$，

故选：A .

3.【答案】C

【解析】第一次循环，$n=30$，$S=30$，否，$n=15$，否，

第二次循环，$n=15$，$S=45$，是，$n=14$，否，

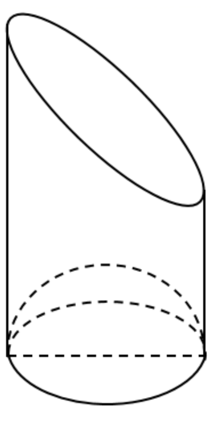
第三次循环，$n=14$，$S=59$，否，$n=7$，否，

第四次循环，$n=7$，$S=66$，是，$n=6$，是，输出 $n=6$，

故选：C.

4.【答案】D

【解析】观察三视图发现：该几何体的形状为圆柱从上方削去一部分，削去部分的体积为圆柱体积一半的一半即 $\frac{1}{4}$，下方挖去半个球，



故几何体的体积为：$V=\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times 2-\frac{1}{4}\times\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times 2-\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\times\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{7}{24}\pi$，

故选：D.

5.【答案】C

【解析】$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\frac{\pi}{3}+\left|\vec{b}\right|^2=2\times1\times\frac{1}{2}+1^2=2$，

故选：C

6.【答案】C

【解析】$a_2+a_8+a_{11}=(a_1+d)+\left(a_1+7d\right)+\left(a_1+10d\right)=3a_1+18d=12$

$\therefore a_1+6d=4$，即 $a_7=4$

$\therefore S_{13}=\frac{13\left(a_1+a_{13}\right)}{2}=13a_7=13\times4=52$

故选：C.

【点睛】

思路点睛：该题考查的是有关数列的问题，解题思路如下：

（1）根据题中所给的条件，结合等差数列通项公式，将其转化为关于首项与公差的式子；

（2）化简求得数列的某一项；

（3）结合等差数列求和公式，得到和与项的关系，求得结果.

7.【答案】A

【解析】解：对于（1），因为$n//\alpha$，所以经过n作平面β，使$\beta\cap\alpha=l$，可得$n//l$，

又因为$m\perp\alpha$，$l\subset\alpha$，所以$m\perp l$，结合$n//l$得$m\perp n$. 由此可得（1）是真命题；

对于（2），因为$\alpha//\beta$且$\beta//\gamma$，所以$\alpha//\gamma$，结合$m\perp\alpha$，可得$m\perp\gamma$，故（2）是真命题；

对于（3），设直线m、n是位于正方体上底面所在平面内的相交直线，

而平面α是正方体下底面所在的平面，

则有$m//\alpha$且$n//\alpha$成立，但不能推出$m//n$，故（3）不正确；

对于（4），设平面α、β、γ是位于正方体经过同一个顶点的三个面，

则有$\alpha\perp\gamma$且$\beta\perp\gamma$，但是$\alpha\perp\beta$，推不出$\alpha//\beta$，故（4）不正确.

综上所述，其中正确命题的序号是（1）和（2）

故选：A

【点睛】

本题考查空间点线面的位置关系判断，考查空间想象能力，逻辑推理能力，是中档题.本题解题的关键在于熟练的掌握线面平行、面面平行的性质和线面垂直、面面垂直的判定与性质等知识.

8.【答案】C

【解析】将 4 名交警随机分配到两个不同路口疏导交通，方法数有 $C_4^2C_2^2=6$ 种，

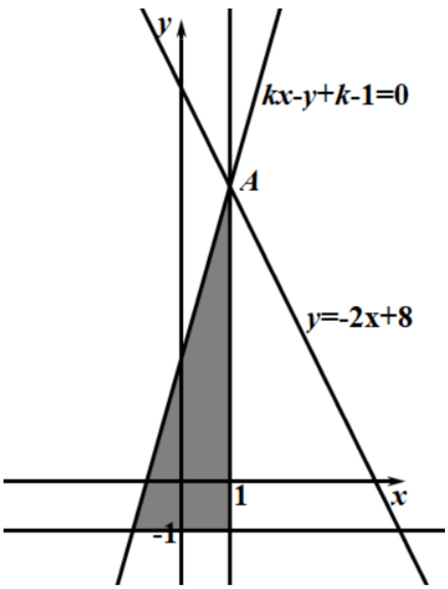
其中甲和乙不在同一路口的方法数由 $\left(C_2^1C_1^1\right)\cdot A_2^2=4$ 种，

故所求概率为 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

故选：C

9.【答案】B

【解析】如图，由 $\begin{cases}8=2x+y\\x=1\end{cases}$ ，解得 $A(1,6)$



由图及线性规划知识可推测直线 $kx-y+k-1=0$ 必过点 $A(1,6)$ ，得 $k=\frac{7}{2}$ ，经验证符合题目条件

故选：B

【点睛】

本题主要考查了根据最值求参数，属于中档题.

10.【答案】A

【解析】设 $\left|PF_2\right|=m,\left|PF_1\right|=n,$ 则由双曲线的定义得：$m-n=2a$ ，

$\therefore \dfrac{|PF_2|^2}{|PF_1|}=\dfrac{(2a+n)^2}{n}=\dfrac{4a^2}{n}+n+4a,n\in[c-a,+\infty)$.

记 $f(n)=\dfrac{4a^2}{n}+n+4a,n\in[c-a,+\infty)$

$f'(n)=1-\dfrac{4a^2}{n^2}$，令 $f'(n)=1-\dfrac{4a^2}{n^2}=0$，得 $n=\pm 2a$

（1）当 $c-a\le 2a$ 时，

$n\in[c-a,2a)$，$f'(n)=1-\dfrac{4a^2}{n^2}<0$，$y=f(n)$ 单减；

$n\in(2a,+\infty)$，$f'(n)=1-\dfrac{4a^2}{n^2}>0$，$y=f(n)$ 单增，

$\therefore f(n)_{\min}=f(2a)=8a$，不合题意，舍去；

（2）当 $c-a>2a$ 时，$f'(n)=1-\dfrac{4a^2}{n^2}>0$ 恒成立，$\therefore y=f(n)$ 单增，

$\therefore f(n)_{\min}=f(c-a)=c+3a+\dfrac{4a^2}{c-a}$

$\therefore c+3a+\dfrac{4a^2}{c-a}=10a,\therefore c^2-8ac+11a^2=0$

解得：$c=(4+\sqrt{5})a$ 或 $c=(4-\sqrt{5})a$

$\because c=(4-\sqrt{5})a$ 不满足 $c-a>2a$，应舍去

$\therefore$ 当 $c=(4+\sqrt{5})a$ 时，离心率 $e=4+\sqrt{5}$.

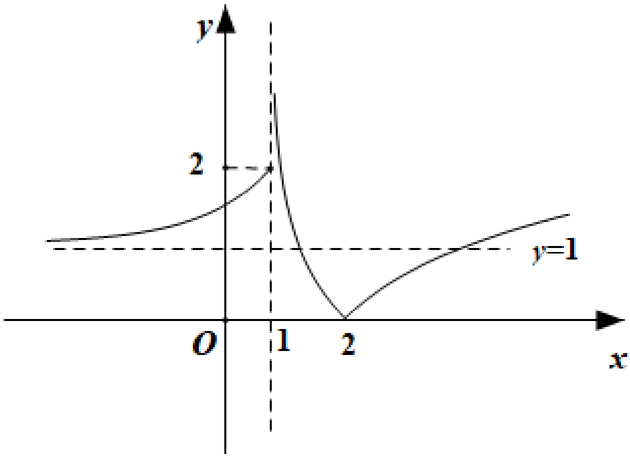
故选：A

【点睛】

求椭圆（双曲线）离心率的一般思路：根据题目的条件，找到 a、b、c 的关系，消去 b，构造离心率 e 的方程或（不等式）即可求出离心率.

11.【答案】D

【解析】$f(x)$的图象如图所示：



因为$F\left(x\right)=f^{2}(x)-2af(x)+\frac{4}{3}$有 4 个不同的零点，故$t^{2}-2at+\frac{4}{3}=0$有解，

设此关于t方程的解为t_1、t_2，其中t_1,t_2均不为零且$t_1t_2=\frac{4}{3}$.

由题设可得关于x的方程$f\left(x\right)=t_1$和$f\left(x\right)=t_2$共有 4 个不同的解，

故$\begin{cases}t_1\ne t_2\\0<t_1\le 1\\0<t_2\le 1\end{cases}$（舍）或$\begin{cases}t_1\ne t_2\\0<t_1\le 1\\t_2>2\end{cases}$或$\begin{cases}t_1\ne t_2\\t_1>2\\t_2>2\end{cases}$（舍）.

所以$\begin{cases}1-2a+\frac{4}{3}\le 0\\4-4a+\frac{4}{3}<0\\0-2a\times 0+\frac{4}{3}>0\end{cases}$，解得$a>\frac{4}{3}$.

故选：D.

【点睛】

方法点睛：复合方程的解的讨论，一般通过换元转化为内、外方程的解来处理，注意根据已知零点的个数合理推断二次方程的根的情况.

12.【答案】A

【解析】由数列$\left\{a_n\right\}$的前n项和S_n，且满足$a_n+S_n=1$，

当$n\ge 2$时，$a_{n-1}+S_{n-1}=1$，

两式相减，可得$a_n-a_{n-1}+(S_n-S_{n-1})=2a_n-a_{n-1}=0$，即$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{1}{2}(n\ge 2)$，

令$n=1$，可得$a_1+S_1=2a_1=1$，解得$a_1=\dfrac{1}{2}$，

所以数列$\{a_n\}$表示首项为$\dfrac{1}{2}$，公比为$\dfrac{1}{2}$的等比数列，所以$a_n=(\dfrac{1}{2})^n$，

则$S_n=\dfrac{\frac{1}{2}[1-(\frac{1}{2})^n]}{1-\frac{1}{2}}=1-(\dfrac{1}{2})^n$ ，所以$\dfrac{S_n}{a_n}=\dfrac{1-(\frac{1}{2})^n}{(\frac{1}{2})^n}=2^n-1$，

所以$\dfrac{S_1}{a_1}+\dfrac{S_2}{a_2}+\dfrac{S_3}{a_3}+\cdots+\dfrac{S_9}{a_9}=(2+2^2+\cdots+2^9)-(1+1\cdots+1)$

$\dfrac{2(1-2^9)}{1-2}-9=2^{10}-11=1013$.

故选：A.

【点睛】

本题考查了等比数列的定义，等比数列的通项公式以及等比数列的前n项和公式的综合应用，着重考查推理与计算能力，属于中档试题.

13.【答案】2

【解析】将$b\cos C+c\cos B=2b$，利用正弦定理化简得：$\sin B\cos C+\sin C\cos B=2\sin B$，

即$\sin(B+C)=2\sin B$，

$\because \sin(B+C)=\sin A$，$\therefore \sin A=2\sin B$，

利用正弦定理化简得：$a=2b$，

则$\dfrac{a}{b}=2$.

故答案为：2.

14.【答案】1 或$\dfrac{1}{2}$

【解析】由题可知：直线AB的斜率为$k_{AB}=\dfrac{m+1}{m^2+2-(m+1)}$

即$k_{AB}=\dfrac{m+1}{m^2-m+1}$

又直线 AB 与斜率为 2 的直线平行

所以 $\dfrac{m+1}{m^2-m+1}=2$

则 $2m^2-3m+1=0$

所以 $m=1$ 或 $m=\dfrac{1}{2}$

故答案为：1 或 $\dfrac{1}{2}$

【点睛】

本题考查直线斜率的坐标表示以及直线的平行关系，掌握直线平行的斜率关系，属基础题.

15．【答案】4

【解析】根据题意类比，令 $\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{+\cdots}}}=t\left(t>0\right)$，

两边平方得，$12+\sqrt{12+\sqrt{+\cdots}}=t^2$，即 $12+t=t^2$，

则 $t^2-t-12=0$，解得 $t=4$，或 $t=-3$（舍去）.

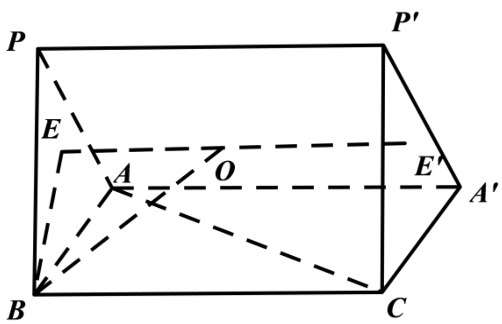
故答案为：4

【点睛】

本题主要考查类比推理，根据题意类比写出方程求解即可，属于基础题.

16．【答案】8π

【解析】因为 $BC\perp$ 平面 PAB，将三棱锥 $P-ABC$ 补形为如图所示的直三棱柱，则它们的外接球相同，



由直三棱柱性质易知外接球球心 O 应在棱柱上下底面三角形的外心连线上，

记 $\triangle ABP$ 的外心为 E，由 $\triangle ABD$ 为等边三角形，即 $\triangle ABD$ 为等边三角形，

$\because AB=\sqrt{3}$，可得 $BE=1$．又 $OE=\dfrac{BC}{2}=1$，

故在 $Rt\triangle OBE$ 中，$OB=\sqrt{OE^2+EB^2}=\sqrt{2}$，

此即为外接球半径，从而外接球表面积为 $S=4\pi\times OB^2=8\pi$.

故答案为：8π .

【点睛】

本题考查了三棱锥外接球的表面积，考查了学生空间想象，逻辑推理，综合分析，数学运算的能力，属于较难题.

17.【答案】（1）$A=\dfrac{\pi}{3}$；（2）$a=2$.

【解析】（1）由正弦定理得：$2\sin A\cos C+\sin C=2\sin B$，

$\because A+B+C=\pi$，$\therefore \sin B=\sin\left(A+C\right)$，

$\therefore 2\sin A\cos C+\sin C=2\sin\left(A+C\right)=2\sin A\cos C+2\cos A\sin C$，

整理可得：$\sin C=2\cos A\sin C$，

$\because C\in\left(0,\pi\right)$，$\therefore \sin C\neq 0$，$\therefore \cos A=\dfrac{1}{2}$，又 $A\in\left(0,\pi\right)$，$\therefore A=\dfrac{\pi}{3}$.

（2）由（1）知 $A=\dfrac{\pi}{3}$，若$\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$，$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\sqrt{3}$，

若$\triangle ABC$ 的周长为 6，$\therefore C_{\triangle ABC}=a+b+c=6$，

由余弦定理，得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

解得 $a=2$.

【点睛】

本题考查了解三角形问题，解题的关键点是要熟练掌握正弦定理、余弦定理、面积公式，考查了学生的计算能力.

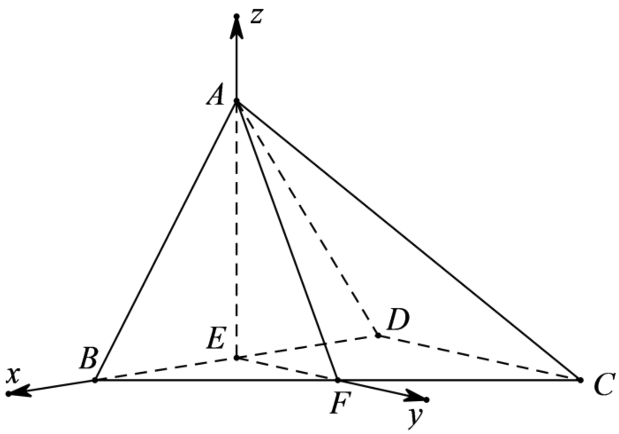
18.【答案】（1）证明见解析；（2）正弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

【解析】（1）证明：由题意知 $AB=AD$，而 E 为 BD 的中点，

$\therefore AE\perp BD$，又面 $ABD\perp$ 面 BCD，面 $ABD\cap$ 面 $BCD=BD$，且 $AE\subset$ 平面 ABD，

$\therefore AE\perp$ 平面 BCD，又 $CD\subset$ 平面 BCD，

$\therefore AE\perp CD$.



（2）由（1）可知，EB，EF，EA 两两相互垂直，可构建以 E 为原点，$\overrightarrow{EB},\overrightarrow{EF},\overrightarrow{EA}$ 为 x 轴、y 轴、z 轴正方向空间直角坐标系，则 $E(0,0,0)$，$A\left(0,0,\dfrac{3}{2}\right)$，$F\left(0,\dfrac{1}{2},0\right)$，$D\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},0,0\right)$，$C\left(-\sqrt{3},\dfrac{3}{2},0\right)$，易知面 AEF 的一个法向量为 $\overrightarrow{ED}=(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},0,0)$，

$\overrightarrow{DA}=(\dfrac{\sqrt{3}}{2},0,\dfrac{3}{2}),\overrightarrow{DC}=(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2},0)$，设平面 ACD 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则：$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{DA}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DC}=0\end{cases}$，

即 $\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\dfrac{3}{2}z=0\\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\dfrac{3}{2}y=0\end{cases}$，令 $y=1$，则 $\vec{n}=(\sqrt{3},1,-1)$，

设平面 AEF 与平面 ADC 所成锐二面角为 θ，则 $\cos\theta=|\cos\langle\overrightarrow{ED},\vec{n}\rangle|=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$，所以其正弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

【点睛】

关键点点睛：

（1）利用含 30° 角的直角三角形性质，结合面面垂直的性质、线面垂直的判定及性质证线线垂直；

（2）应用向量法求二面角的余弦值，进而求正弦值即可.

19.【答案】(1) $\hat{y}=0.5x^2+0.8$；(2) 模型二的拟合效果更好.

【解析】(1) 令 $t=x^2$，则模型二可化为y关于t的线性回归问题，

则$\bar{t}=\dfrac{1+4+9+16+25}{5}=11$，$\bar{y}=\dfrac{1.3+2.8+5.7+8.9+13.8}{5}=6.5$，

则由参考数据可得$\hat{c}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}t_iy_i-5\bar{t}\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{5}t_i^2-5\bar{t}^2}\approx 0.52\approx 0.5$，

$d=\bar{y}-\hat{c}\bar{t}=6.5-0.52\times 11\approx 0.8$，

则模型二的方程为$\hat{y}=0.5x^2+0.8$；

(2) 由模型二的回归方程可得，$\hat{y}_1^{(2)}=0.5\times 1+0.8=1.3$，$\hat{y}_2^{(2)}=0.5\times 4+0.8=2.8$，

$\hat{y}_3^{(2)}=0.5\times 9+0.8=5.3$，$\hat{y}_4^{(2)}=0.5\times 16+0.8=8.8$，$\hat{y}_5^{(2)}=0.5\times 25+0.8=13.3$，

$\therefore \sum\limits_{i=1}^{5}(y_i-\hat{y}_i^{(2)})^2=0^2+0^2+0.4^2+0.1^2+0.5^2=0.42<3.7$，

故模型二的拟合效果更好.

【点睛】

本题考查线性回归方程和残差平方和的计算，解题的关键是正确计算出各个值，避免计算出错，正确应用公式.

20.【答案】(1) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$；(2) 证明见解析，$(6,0)$.

【解析】(1) 由$\begin{cases}2b=2\sqrt{3}\\a-c=1\\a^2-c^2=b^2\end{cases}$得$\begin{cases}b=\sqrt{3}\\a=2\\c=1\end{cases}$，

所以椭圆C的标准方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

(2) 当直线l斜率不存在时，直线l与椭圆C交于不同的两点分布在x轴两侧，不合题意.

所以直线l斜率存在，设直线l的方程为$y=kx+m$.

设 $E(x_1,y_1)$ 、 $F(x_2,y_2)$,

由 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\\ y=kx+m\end{cases}$ 得 $(3+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-12=0$,

所以 $x_1+x_2=\dfrac{-8km}{3+4k^2}$, $x_1x_2=\dfrac{4m^2-12}{3+4k^2}$.

因为 $\angle APE=\angle OPF$,

所以 $k_{PE}+k_{PF}=0$,

即 $\dfrac{y_1}{x_1-\dfrac{2}{3}}+\dfrac{y_2}{x_2-\dfrac{2}{3}}=0$ ，整理得 $2kx_1x_2+(m-\dfrac{2}{3}k)(x_1+x_2)-\dfrac{4m}{3}=0$

化简得 $m=-6k$,

所以直线 l 的方程为 $y=kx-6k=k(x-6)$,

所以直线 l 过定点 $(6,0)$.

21.【答案】（1）答案见解析；（2）证明见解析；

【解析】解：（1）函数 $f(x)=x^2-4x+alnx$ 的导数为 $f'(x)=2x-4+\dfrac{a}{x}(x>0)$

$=\dfrac{2x^2-4x+a}{x}$,

①当 $\Delta=16-8a\le 0$ ，即 $a\ge 2$ ， $2x^2-4x+a>0$ 恒成立，可得 $f'(x)>0$ 恒成立.

即有 $f(x)$ 的增区间为 $(0,+\infty)$ ，无减区间；

当 $\Delta=16-8a>0$ ，即 $a<2$ ，可得 $2x^2-4x+a=0$ 的两根为 $x=1\pm\sqrt{1-\dfrac{a}{2}}$,

②当 $0<a<2$ 时， $1+\sqrt{1-\dfrac{a}{2}}>1-\sqrt{1-\dfrac{a}{2}}>0$,

$f'(x)>0$ ，可得 $x>1+\sqrt{1-\dfrac{a}{2}}$ ，或 $0<x<1-\sqrt{1-\dfrac{a}{2}}$ ；

$f'(x)<0$ ，可得 $1-\sqrt{1-\dfrac{a}{2}}<x<1+\sqrt{1-\dfrac{a}{2}}$,

即 $f(x)$ 的增区间为 $\left(1+\sqrt{1-\dfrac{a}{2}},+\infty\right)$ ， $\left(0,1-\sqrt{1-\dfrac{a}{2}}\right)$ ；减区间为 $\left(1-\sqrt{1-\dfrac{a}{2}},1+\sqrt{1-\dfrac{a}{2}}\right)$ ；

③当 $a\leqslant 0$ 时， $1+\sqrt{1-\dfrac{a}{2}}>0$ ， $1-\sqrt{1-\dfrac{a}{2}}\leqslant 0$,

$f'(x)>0$，可得 $x>1+\sqrt{1-\dfrac{a}{2}}$；

$f'(x)<0$，可得 $0<x<1+\sqrt{1-\dfrac{a}{2}}$，

即 $f(x)$ 的增区间为 $\left(1+\sqrt{1-\dfrac{a}{2}},+\infty\right)$；减区间为 $\left(0,1+\sqrt{1-\dfrac{a}{2}}\right)$；

综上可得：当 $a\geq 2$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，无减区间；

当 $0<a<2$ 时，$f(x)$ 的增区间为 $\left(1+\sqrt{1-\dfrac{a}{2}},+\infty\right)$，$\left(0,1-\sqrt{1-\dfrac{a}{2}}\right)$；减区间为

$\left(1-\sqrt{1-\dfrac{a}{2}},1+\sqrt{1-\dfrac{a}{2}}\right)$；

当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 的增区间为 $\left(1+\sqrt{1-\dfrac{a}{2}},+\infty\right)$；减区间为 $\left(0,1+\sqrt{1-\dfrac{a}{2}}\right)$；

（2）证明：函数 $f(x)=x^2-4x+alnx$ 的导数为 $f'(x)=2x-4+\dfrac{a}{x}=\dfrac{2x^2-4x+a}{x}(x>0)$，

由题意可得 x_1，x_2 是 $2x^2-4x+a=0$ 的两根，且 $x_2=1+\sqrt{1-\dfrac{a}{2}}$，$0<a<2$，

可得 $x_2\in(1,2)$，

设 $g(x)=f(x)+4=x^2-4x+alnx+4$，$1<x<2$，

又 $a=4x-2x^2$，可得 $g(x)=x^2-4x+(4x-2x^2)lnx+4$，

$g'(x)=2x-4+(4-4x)lnx+(4x-2x^2)\cdot\dfrac{1}{x}=4(1-x)lnx$，

由 $1<x<2$ 可得 $4(1-x)lnx<0$，即 $g(x)$ 在 $(1,2)$ 递减，

则 $g(x)\in(0，1)$，显然 $g(x)>0$ 恒成立，

则 $f(x_2)>-4$．

【点睛】

本题考查导数的运用：求切线的方程和单调区间，考查分类讨论的思想方法，考查不等式恒成立问题的解法，注意运用构造函数法，运用单调性解决，考查化简整理的运算能力.

22．【答案】（1）曲线 C：$y^2=x$，直线 l：$x-3y-1=0$；（2）$\dfrac{\sqrt{130}}{10}$.

【解析】（1）曲线C的参数方程为$\begin{cases} x=m^2+\dfrac{4}{m^2}-4 \\ y=m-\dfrac{2}{m} \end{cases}$ (m为参数，且$m>0$)，即$x=(m-\dfrac{2}{m})^2$，

$\therefore$曲线C的直角坐标方程为$y^2=x$.

直线l的极坐标方程为$\rho\cos\theta-3\rho\sin\theta-1=0$，而$x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$，

$\therefore$直线l的直角坐标方程为$x-3y-1=0$.

（2）直线l与x轴交点记为M，即$(1,0)$，其参数方程可写为$\begin{cases} x=1+\dfrac{3}{\sqrt{10}}t \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{10}}t \end{cases}$ (t为参数)，与曲线C交于P，Q两点，

$\therefore$把直线的参数方程代入方程$y^2=x$，得到$t^2-3\sqrt{10}t-10=0$，即有$t_1+t_2=3\sqrt{10}$，

$t_1t_2=-10<0$

$\therefore \dfrac{1}{|PM|}+\dfrac{1}{|QM|}=\dfrac{|t_1-t_2|}{|t_1t_2|}=\dfrac{\sqrt{(3\sqrt{10})^2+40}}{10}=\dfrac{\sqrt{130}}{10}$.

【点睛】

关键点点睛：

（1）应用因式分解、极坐标与直角坐标关系，写出直角坐标方程；

（2）求直线与x轴交点，以交点为极点写出直线的参数方程，结合曲线方程，由韦达定理求直线与曲线的两个交点与极点的距离(它们的数量关系)，进而求$\dfrac{1}{|PM|}+\dfrac{1}{|QM|}$.

23.【答案】（1）$\{x|x\le-2$或$x\ge2\}$；（2）证明见解析.

【解析】（1）当$a=1$时，$f(x)=|x+1|+|x-1|$.

当$x\le-1$时，$f(x)=-x-1-x+1=-2x\ge4$，解得$x\leqslant-2$；

当$-1<x<1$时，$f(x)=x+1-x+1=2\ge4$，无解；

当$x\ge1$时，$f(x)=x+1+x-1=2x\ge4$，解得$x\ge2$；

综上所述：$f\left(x\right)\geq 4$的解集为$\left\{x\middle|x\leq -2\text{ 或 }x\geq 2\right\}$.

（2）$\left|x+\frac{1}{a}\right|+\left|x-a\right|=\left|x+\frac{1}{a}\right|+\left|a-x\right|\geq \left|x+\frac{1}{a}+a-x\right|$

$=\left|a\right|+\left|\frac{1}{a}\right|\geq 2$，

当且仅当$a=1$时等号成立，

所以$f\left(x\right)\geq 2$.