2022年普通高等学校招生全国统一考试

数学（新高考Ⅰ卷）

本试卷共4页，22小题，满分150分.考试用时120分钟.

注意事项：

1．答卷前，考生务必用黑色字迹钢笔或签字笔将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上.用2B铅笔将试卷类型（A）填涂在答题卡相应位置上.将条形码横贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”.

2．作答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案，答案不能答在试卷上.

3．非选择题必须用黑色字迹钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液.不按以上要求作答的答案无效.

4．考生必须保持答题卡的整洁.考试结束后，将试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 若集合 $M=\{x\mid\sqrt{x}<4\}$，$N=\{x\mid 3x\geq 1\}$，则 $M\cap N=$（　　）

A. $\left\{x\middle|0\leq x<2\right\}$　　B. $\left\{x\middle|\frac{1}{3}\leq x<2\right\}$

C. $\left\{x\middle|3\leq x<16\right\}$　　D. $\left\{x\middle|\frac{1}{3}\leq x<16\right\}$

【答案】D

2. 若 $\mathrm{i}(1-z)=1$，则 $z+\bar{z}=$（　　）

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

【答案】D

3. 在□ABC中，点D在边AB上，$BD=2DA$．记$\overrightarrow{CA}=\vec{m},\overrightarrow{CD}=\vec{n}$，则$\overrightarrow{CB}=$（　　）

A. $3\vec{m}-2\vec{n}$　　B. $-2\vec{m}+3\vec{n}$

C. $3\vec{m}+2\vec{n}$　　D. $2\vec{m}+3\vec{n}$

【答案】B

4. 南水北调工程缓解了北方一些地区水资源短缺问题，其中一部分水蓄入某水库.已知该水库水位为海拔148.5m时，相应水面的面积为140.0km^2；水位为海拔157.5m时，相应水面的面积为180.0km^2，将该水库在这两个水位间的形状看作一个棱台，则该水库水位从海拔148.5m上升到157.5m时，增加的水量约为（$\sqrt{7}\approx 2.65$）（　　）

A. $1.0\times 10^9\text{m}^3$　　B. $1.2\times 10^9\text{m}^3$

C. $1.4\times 10^9\text{m}^3$　　D. $1.6\times 10^9\text{m}^3$

【答案】C

5. 从 2 至 8 的 7 个整数中随机取 2 个不同的数，则这 2 个数互质的概率为（　　）

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

【答案】D

6. 记函数$f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)+b(\omega>0)$的最小正周期为$T$. 若$\frac{2\pi}{3}<T<\pi$，且$y=f(x)$的图象关于点$\left(\frac{3\pi}{2},2\right)$中心对称，则$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=$（　　）

A. 1　　B. $\frac{3}{2}$　　C. $\frac{5}{2}$　　D. 3

【答案】A

7. 设$a=0.1\text{e}^{0.1},b=\frac{1}{9}$，$c=-\ln 0.9$，则（　　）

A. $a<b<c$　　B. $c<b<a$　　C. $c<a<b$　　D. $a<c<b$

【答案】C

8. 已知正四棱锥的侧棱长为l，其各顶点都在同一球面上.若该球的体积为36π，且$3\le l\le 3\sqrt{3}$，则该正四棱锥体积的取值范围是（　　）

A. $\left[18,\frac{81}{4}\right]$　　B. $\left[\frac{27}{4},\frac{81}{4}\right]$　　C. $\left[\frac{27}{4},\frac{64}{3}\right]$　　D. $[18,27]$

【答案】C

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9. 已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$，则（　　）

A. 直线BC_1与DA_1所成的角为$90°$

B. 直线BC_1与CA_1所成的角为$90°$

C. 直线BC_1与平面BB_1D_1D所成的角为$45°$

D. 直线BC_1与平面$ABCD$所成的角为$45°$

【答案】ABD

10. 已知函数$f(x)=x^3-x+1$，则（　　）

A. $f(x)$有两个极值点

B. $f(x)$有三个零点

C. 点$(0,1)$是曲线$y=f(x)$的对称中心

D. 直线$y=2x$是曲线$y=f(x)$的切线

【答案】AC

11. 已知O为坐标原点，点$A(1,1)$在抛物线$C:x^2=2py(p>0)$上，过点$B(0,-1)$的直线交C于P，Q两点，则（　　）

A. C的准线为$y=-1$

B. 直线AB与C相切

C. $|OP|\cdot|OQ|>|OA|^2$

D. $|BP|\cdot|BQ|>|BA|^2$

【答案】BCD

12. 已知函数$f(x)$及其导函数$f'(x)$的定义域均为$\mathbf{R}$，记$g(x)=f'(x)$，若$f\left(\frac{3}{2}-2x\right)$，$g(2+x)$均为偶函数，则（　　）

A. $f(0)=0$

B. $g\left(-\frac{1}{2}\right)=0$

C. $f(-1)=f(4)$

D. $g(-1)=g(2)$

【答案】BC

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分．

13. $\left(1-\dfrac{y}{x}\right)(x+y)^8$ 的展开式中 x^2y^6 的系数为______________（用数字作答）.

【答案】-28

14. 写出与圆 $x^2+y^2=1$ 和 $(x-3)^2+(y-4)^2=16$ 都相切的一条直线的方程

______________.

【答案】$y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{5}{4}$ 或 $y=\dfrac{7}{24}x-\dfrac{25}{24}$ 或 $x=-1$

15. 若曲线 $y=(x+a)\mathrm{e}^x$ 有两条过坐标原点的切线，则 a 的取值范围是

______________.

【答案】$(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)$

16. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$C$ 的上顶点为 A，两个焦点为 F_1，F_2，离心率为 $\dfrac{1}{2}$．过 F_1 且垂直于 AF_2 的直线与 C 交于 D，E 两点，$|DE|=6$，则 $\triangle ADE$ 的周长是

______________.

【答案】13

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_1=1,\left\{\dfrac{S_n}{a_n}\right\}$ 是公差为 $\dfrac{1}{3}$ 的等差数列.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）证明：$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}<2$.

（1）解；$\because a_1=1$，$\therefore S_1=a_1=1,\therefore \dfrac{S_1}{a_1}=1$，

又 $\because \left\{\dfrac{S_n}{a_n}\right\}$ 是公差为 $\dfrac{1}{3}$ 的等差数列，

$\therefore \dfrac{S_n}{a_n}=1+\dfrac{1}{3}(n-1)=\dfrac{n+2}{3},\therefore S_n=\dfrac{(n+2)a_n}{3}$，

$\therefore$ 当 $n\geq 2$ 时，$S_{n-1}=\dfrac{(n+1)a_{n-1}}{3}$，

$\therefore a_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{(n+2)a_n}{3}-\dfrac{(n+1)a_{n-1}}{3}$,

整理得：$(n-1)a_n=(n+1)a_{n-1}$，

即 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{n+1}{n-1}$，

$\therefore a_n=a_1\times\dfrac{a_2}{a_1}\times\dfrac{a_3}{a_2}\times\ldots\times\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\times\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$

$=1\times\dfrac{3}{2}\times\dfrac{4}{3}\times\ldots\times\dfrac{n}{n-2}\times\dfrac{n+1}{n-1}=\dfrac{n(n+1)}{2}$，

显然对于 $n=1$ 也成立，

$\therefore \{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$；

（2）证明：$\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{2}{n(n+1)}=2\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$，

$\therefore \dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}=2\left[\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)\right]=2\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)<2$

18. 记□ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $\dfrac{\cos A}{1+\sin A}=\dfrac{\sin 2B}{1+\cos 2B}$.

（1）若 $C=\dfrac{2\pi}{3}$，求 B；

（2）求 $\dfrac{a^2+b^2}{c^2}$ 的最小值.

解：（1）因为 $\dfrac{\cos A}{1+\sin A}=\dfrac{\sin 2B}{1+\cos 2B}=\dfrac{2\sin B\cos B}{2\cos^2 B}=\dfrac{\sin B}{\cos B}$，即

$\sin B=\cos A\cos B-\sin A\sin B=\cos(A+B)=-\cos C=\dfrac{1}{2}$，

而 $0<B<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $B=\dfrac{\pi}{6}$；

（2）由（1）知，$\sin B=-\cos C>0$，所以 $\dfrac{\pi}{2}<C<\pi, 0<B<\dfrac{\pi}{2}$，

而 $\sin B=-\cos C=\sin\left(C-\dfrac{\pi}{2}\right)$，

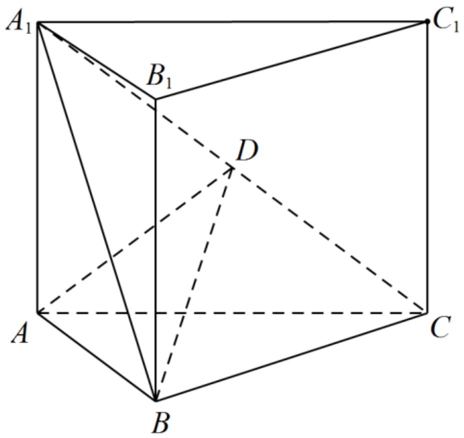
所以 $C=\dfrac{\pi}{2}+B$，即有 $A=\dfrac{\pi}{2}-2B$.

所以$\dfrac{a^2+b^2}{c^2}=\dfrac{\sin^2 A+\sin^2 B}{\sin^2 C}=\dfrac{\cos^2 2B+1-\cos^2 B}{\cos^2 B}$

$=\dfrac{\left(2\cos^2 B-1\right)^2+1-\cos^2 B}{\cos^2 B}=4\cos^2 B+\dfrac{2}{\cos^2 B}-5\geq 2\sqrt{8}-5=4\sqrt{2}-5$.

当且仅当$\cos^2 B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时取等号，所以$\dfrac{a^2+b^2}{c^2}$的最小值为$4\sqrt{2}-5$.

19. 如图，直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的体积为 4，$\triangle A_1BC$的面积为$2\sqrt{2}$.



（1）求 A 到平面A_1BC的距离；

（2）设 D 为A_1C的中点，$AA_1=AB$，平面$A_1BC\perp$平面ABB_1A_1，求二面角$A-BD-C$的正弦值.

解：（1）在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，设点 A 到平面A_1BC的距离为 h，

则$V_{A-A_1BC}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle A_1BC}\cdot h=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}h=V_{A_1-ABC}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot A_1A=\dfrac{1}{3}V_{ABC-A_1B_1C_1}=\dfrac{4}{3}$，

解得$h=\sqrt{2}$，

所以点 A 到平面A_1BC的距离为$\sqrt{2}$；

（2）取A_1B的中点 E,连接 AE,如图，因为$AA_1=AB$，所以$AE\perp A_1B$，

又平面$A_1BC\perp$平面ABB_1A_1，平面$A_1BC\cap$平面$ABB_1A_1=A_1B$，

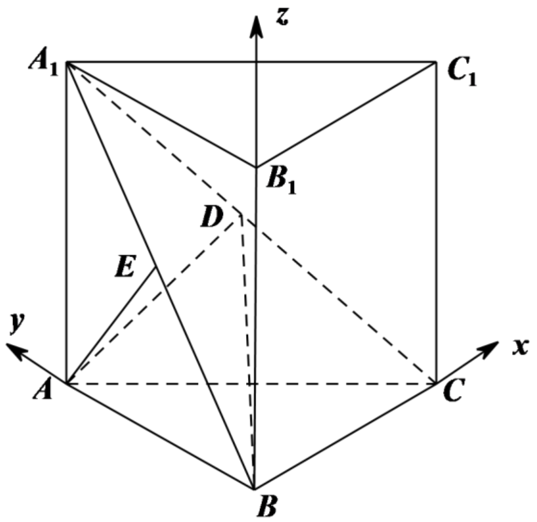
且$AE\subset$平面ABB_1A_1，所以$AE\perp$平面A_1BC，

在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$BB_1\perp$平面ABC，

由 $BC \subset$ 平面 A_1BC，$BC \subset$ 平面 ABC 可得 $AE \perp BC$，$BB_1 \perp BC$，

又 $AE, BB_1 \subset$ 平面 ABB_1A_1 且相交，所以 $BC \perp$ 平面 ABB_1A_1，

所以 BC, BA, BB_1 两两垂直，以 B 为原点，建立空间直角坐标系，如图，



由（1）得 $AE=\sqrt{2}$，所以 $AA_1=AB=2$，$A_1B=2\sqrt{2}$，所以 $BC=2$，

则 $A(0,2,0), A_1(0,2,2), B(0,0,0), C(2,0,0)$,所以 A_1C 的中点 $D(1,1,1)$，

则 $\overrightarrow{BD}=(1,1,1)$，$\overrightarrow{BA}=(0,2,0), \overrightarrow{BC}=(2,0,0)$，

设平面 ABD 的一个法向量 $\vec{m}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{BD}=x+y+z=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BA}=2y=0\end{cases}$，

可取 $\vec{m}=(1,0,-1)$，

设平面 BDC 的一个法向量 $\vec{n}=(a,b,c)$，则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{BD}=a+b+c=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BC}=2a=0\end{cases}$，

可取 $\overset{1}{n}=(0,1,-1)$，

则 $\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$，

所以二面角 $A-BD-C$ 的正弦值为 $\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

20. 一医疗团队为研究某地的一种地方性疾病与当地居民的卫生习惯（卫生习惯分为良好和不够良好两类）的关系，在已患该疾病的病例中随机调查了 100 例（称为病例组），同时

在未患该疾病的人群中随机调查了 100 人（称为对照组），得到如下数据：

	不够良好	良好
病例组	40	60
对照组	10	90

（1）能否有 99%的把握认为患该疾病群体与未患该疾病群体的卫生习惯有差异？

（2）从该地的人群中任选一人，A 表示事件"选到的人卫生习惯不够良好"，B 表示事件"选到的人患有该疾病"．$\dfrac{P(B|A)}{P(\overline{B}|A)}$ 与 $\dfrac{P(B|\overline{A})}{P(\overline{B}|\overline{A})}$ 的比值是卫生习惯不够良好对患该疾病风险程度的一项度量指标，记该指标为 R.

（ⅰ）证明：$R=\dfrac{P(A|B)}{P(\overline{A}|B)}\cdot\dfrac{P(\overline{A}|\overline{B})}{P(A|\overline{B})}$；

（ⅱ）利用该调查数据，给出 $P(A|B),P(A|\overline{B})$ 的估计值，并利用（ⅰ）的结果给出 R 的估计值.

附 $K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，

$P\left(K^2\geq k\right)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

解：（1）由已知 $K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\dfrac{200(40\times90-60\times10)^2}{50\times150\times100\times100}=24$，

又 $P(K^2\geq6.635)=0.01$，$24>6.635$，

所以有 99%的把握认为患该疾病群体与未患该疾病群体的卫生习惯有差异.

（2）(i)因为 $R=\dfrac{P(B|A)}{P(\overline{B}|A)}\cdot\dfrac{P(\overline{B}|\overline{A})}{P(B|\overline{A})}=\dfrac{P(AB)}{P(A)}\cdot\dfrac{P(A)}{P(A\overline{B})}\cdot\dfrac{P(\overline{A}\overline{B})}{P(\overline{A})}\cdot\dfrac{P(\overline{A})}{P(\overline{A}B)}$，

所以 $R=\dfrac{P(AB)}{P(B)}\cdot\dfrac{P(B)}{P(\overline{A}B)}\cdot\dfrac{P(\overline{A}\overline{B})}{P(\overline{B})}\cdot\dfrac{P(\overline{B})}{P(A\overline{B})}$

所以 $R=\dfrac{P(A|B)}{P(\overline{A}|B)}\cdot\dfrac{P(\overline{A}|\overline{B})}{P(A|\overline{B})}$，

(ii)

由已知$P(A|B)=\dfrac{40}{100}$，$P(A|\bar{B})=\dfrac{10}{100}$，

又$P(\bar{A}|B)=\dfrac{60}{100}$，$P(\bar{A}|\bar{B})=\dfrac{90}{100}$，

所以$R=\dfrac{P(A|B)}{P(\bar{A}|B)}\cdot\dfrac{P(\bar{A}|\bar{B})}{P(A|\bar{B})}$=6

21. 已知点$A(2,1)$在双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{a^2-1}=1(a>1)$上，直线$l$交$C$于$P$，$Q$两点，直线$AP,AQ$的斜率之和为0.

（1）求l的斜率；

（2）若$\tan\angle PAQ=2\sqrt{2}$，求$\triangle PAQ$的面积.

解：（1）因为点$A(2,1)$在双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{a^2-1}=1(a>1)$上，所以$\dfrac{4}{a^2}-\dfrac{1}{a^2-1}=1$，

解得$a^2=2$，即双曲线$C:\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$

易知直线l的斜率存在，设$l:y=kx+m$，$P\left(x_1,y_1\right),Q\left(x_2,y_2\right)$，

联立$\begin{cases}y=kx+m\\ \dfrac{x^2}{2}-y^2=1\end{cases}$可得，$\left(1-2k^2\right)x^2-4mkx-2m^2-2=0$，

所以，$x_1+x_2=-\dfrac{4mk}{2k^2-1},x_1x_2=\dfrac{2m^2+2}{2k^2-1}$，

$\varDelta=16m^2k^2+4\left(2m^2+2\right)\left(2k^2-1\right)>0\Rightarrow m^2-1+2k^2>0$.

所以由$k_{AP}+k_{BP}=0$可得，$\dfrac{y_2-1}{x_2-2}+\dfrac{y_1-1}{x_1-2}=0$，

即$\left(x_1-2\right)\left(kx_2+m-1\right)+\left(x_2-2\right)\left(kx_1+m-1\right)=0$，

即$2kx_1x_2+\left(m-1-2k\right)\left(x_1+x_2\right)-4\left(m-1\right)=0$，

所以$2k\times\dfrac{2m^2+2}{2k^2-1}+\left(m-1-2k\right)\left(-\dfrac{4mk}{2k^2-1}\right)-4\left(m-1\right)=0$，

化简得，$8k^2+4k-4+4m\left(k+1\right)=0$，即$\left(k+1\right)\left(2k-1+m\right)=0$，

所以$k=-1$或$m=1-2k$，

当$m=1-2k$时，直线$l:y=kx+m=k\left(x-2\right)+1$过点$A\left(2,1\right)$，与题意不符，舍去，

故$k=-1$.

（2）不妨设直线PA,PB的倾斜角为$\alpha,\beta\left(\alpha<\beta\right)$，因为$k_{AP}+k_{BP}=0$，所以

$\alpha+\beta=\pi$，

因为$\tan\angle PAQ=2\sqrt{2}$，所以$\tan\left(\beta-\alpha\right)=2\sqrt{2}$，即$\tan 2\alpha=-2\sqrt{2}$，

即$\sqrt{2}\tan^2\alpha-\tan\alpha-\sqrt{2}=0$，解得$\tan\alpha=\sqrt{2}$，

于是，直线$PA:y=\sqrt{2}\left(x-2\right)+1$，直线$PB:y=-\sqrt{2}\left(x-2\right)+1$，

联立$\begin{cases}y=\sqrt{2}\left(x-2\right)+1\\ \dfrac{x^2}{2}-y^2=1\end{cases}$可得，$\dfrac{3}{2}x^2+2\left(1-2\sqrt{2}\right)x+10-4\sqrt{2}=0$，

因为方程有一个根为2，所以$x_P=\dfrac{10-4\sqrt{2}}{3}$，$y_P=\dfrac{4\sqrt{2}-5}{3}$，

同理可得，$x_Q=\dfrac{10+4\sqrt{2}}{3}$，$y_Q=\dfrac{-4\sqrt{2}-5}{3}$.

所以$PQ:x+y-\dfrac{5}{3}=0$，$\left|PQ\right|=\dfrac{16}{3}$，

点 A 到直线PQ的距离$d=\dfrac{\left|2+1-\dfrac{5}{3}\right|}{\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，

故$\triangle PAQ$的面积为$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{16}{3}\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=\dfrac{16\sqrt{2}}{9}$.

22. 已知函数$f(x)=\mathrm{e}^x-ax$和$g(x)=ax-\ln x$有相同　最小值.

（1）求a；

（2）证明：存在直线$y=b$，其与两条曲线$y=f(x)$和$y=g(x)$共有三个不同的交点，并且从左到右的三个交点的横坐标成等差数列.

（1）解：$f(x)=\mathrm{e}^x-ax$的定义域为$\mathbf{R}$，而$f'(x)=\mathrm{e}^x-a$，

若 $a \le 0$，则 $f'(x) > 0$，此时 $f(x)$ 无最小值，故 $a > 0$.

$g(x) = ax - \ln x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$，而 $g'(x) = a - \dfrac{1}{x} = \dfrac{ax-1}{x}$.

当 $x < \ln a$ 时，$f'(x) < 0$，故 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 上为减函数，

当 $x > \ln a$ 时，$f'(x) > 0$，故 $f(x)$ 在 $(\ln a, +\infty)$ 上为增函数，

故 $f(x)_{\min} = f(\ln a) = a - a\ln a$.

当 $0 < x < \dfrac{1}{a}$ 时，$g'(x) < 0$，故 $g(x)$ 在 $\left(0, \dfrac{1}{a}\right)$ 上为减函数，

当 $x > \dfrac{1}{a}$ 时，$g'(x) > 0$，故 $g(x)$ 在 $\left(\dfrac{1}{a}, +\infty\right)$ 上为增函数，

故 $g(x)_{\min} = g\left(\dfrac{1}{a}\right) = 1 - \ln\dfrac{1}{a}$.

因为 $f(x) = e^x - ax$ 和 $g(x) = ax - \ln x$ 有相同的最小值，

故 $1 - \ln\dfrac{1}{a} = a - a\ln a$，整理得到 $\dfrac{a-1}{1+a} = \ln a$，其中 $a > 0$，

设 $g(a) = \dfrac{a-1}{1+a} - \ln a, a > 0$，则 $g'(a) = \dfrac{2}{(1+a)^2} - \dfrac{1}{a} = \dfrac{-a^2-1}{a(1+a)^2} \le 0$，

故 $g(a)$ 为 $(0, +\infty)$ 上的减函数，而 $g(1) = 0$，

故 $g(a) = 0$ 的唯一解为 $a = 1$，故 $\dfrac{1-a}{1+a} = \ln a$ 的解为 $a = 1$.

综上，$a = 1$.

（2）证明：由（1）可得 $f(x) = e^x - x$ 和 $g(x) = x - \ln x$ 的最小值为 $1 - \ln 1 = 1 - \ln\dfrac{1}{1} = 1$.

当 $b > 1$ 时，考虑 $e^x - x = b$ 的解的个数、$x - \ln x = b$ 的解的个数.

设 $S(x) = e^x - x - b$，$S'(x) = e^x - 1$，

当 $x < 0$ 时，$S'(x) < 0$，当 $x > 0$ 时，$S'(x) > 0$，

故 $S(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上为减函数，在 $(0, +\infty)$ 上为增函数，

所以 $S(x)_{\min} = S(0) = 1 - b < 0$，

而$S\left(-b\right)=\mathrm{e}^{-b}>0$，$S\left(b\right)=\mathrm{e}^{b}-2b$，

设$u\left(b\right)=\mathrm{e}^{b}-2b$，其中$b>1$，则$u'\left(b\right)=\mathrm{e}^{b}-2>0$，

故$u\left(b\right)$在$\left(1,+\infty\right)$上为增函数，故$u\left(b\right)>u\left(1\right)=\mathrm{e}-2>0$，

故$S\left(b\right)>0$，故$S\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-x-b$有两个不同的零点，即$\mathrm{e}^{x}-x=b$的解的个数为2.

设$T\left(x\right)=x-\ln x-b$，$T'\left(x\right)=\dfrac{x-1}{x}$，

当$0<x<1$时，$T'\left(x\right)<0$，当$x>1$时，$T'\left(x\right)>0$，

故$T\left(x\right)$在$\left(0,1\right)$上为减函数，在$\left(1,+\infty\right)$上为增函数，

所以$T\left(x\right)_{\min}=T\left(1\right)=1-b<0$，

而$T\left(\mathrm{e}^{-b}\right)=\mathrm{e}^{-b}>0$，$T\left(\mathrm{e}^{b}\right)=\mathrm{e}^{b}-2b>0$，

$T\left(x\right)=x-\ln x-b$有两个不同的零点即$x-\ln x=b$的解的个数为2.

当$b=1$，由（1）讨论可得$x-\ln x=b$、$\mathrm{e}^{x}-x=b$仅有一个零点，

当$b<1$时，由（1）讨论可得$x-\ln x=b$、$\mathrm{e}^{x}-x=b$均无零点，

故若存在直线$y=b$与曲线$y=f\left(x\right)$、$y=g\left(x\right)$有三个不同的交点，

则$b>1$.

设$h(x)=\mathrm{e}^{x}+\ln x-2x$，其中$x>0$，故$h'(x)=\mathrm{e}^{x}+\dfrac{1}{x}-2$，

设$s\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-x-1$，$x>0$，则$s'\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-1>0$，

故$s\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上为增函数，故$s\left(x\right)>s\left(0\right)=0$即$\mathrm{e}^{x}>x+1$，

所以$h'(x)>x+\dfrac{1}{x}-1\geq 2-1>0$，所以$h(x)$在$\left(0,+\infty\right)$上为增函数，

而$h(1)=\mathrm{e}-2>0$，$h(\dfrac{1}{\mathrm{e}^{3}})=\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}^{3}}}-3-\dfrac{2}{\mathrm{e}^{3}}<\mathrm{e}-3-\dfrac{2}{\mathrm{e}^{3}}<0$，

故$h\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上有且只有一个零点x_0，$\dfrac{1}{\mathrm{e}^{3}}<x_0<1$且：

当$0<x<x_0$时，$h\left(x\right)<0$即$\mathrm{e}^{x}-x<x-\ln x$即$f\left(x\right)<g\left(x\right)$，

当$x>x_0$时，$h\left(x\right)>0$即$\mathrm{e}^{x}-x>x-\ln x$即$f\left(x\right)>g\left(x\right)$，

因此若存在直线 $y=b$ 与曲线 $y=f\left(x\right)$、$y=g\left(x\right)$ 有三个不同　交点，

故 $b=f\left(x_0\right)=g\left(x_0\right)>1$，

此时 $\mathrm{e}^x-x=b$ 有两个不同的零点 $x_1,x_0(x_1<0<x_0)$，

此时 $x-\ln x=b$ 有两个不同的零点 $x_0,x_4(0<x_0<1<x_4)$，

故 $\mathrm{e}^{x_1}-x_1=b$，$\mathrm{e}^{x_0}-x_0=b$，$x_4-\ln x_4-b=0$，$x_0-\ln x_0-b=0$

所以 $x_4-b=\ln x_4$ 即 $\mathrm{e}^{x_4-b}=x_4$ 即 $\mathrm{e}^{x_4-b}-\left(x_4-b\right)-b=0$，

故 x_4-b 为方程 $\mathrm{e}^x-x=b$ 的解，同理 x_0-b 也为方程 $\mathrm{e}^x-x=b$ 的解

又 $\mathrm{e}^{x_1}-x_1=b$ 可化为 $\mathrm{e}^{x_1}=x_1+b$ 即 $x_1-\ln\left(x_1+b\right)=0$ 即 $\left(x_1+b\right)-\ln\left(x_1+b\right)-b=0$，

故 x_1+b 为方程 $x-\ln x=b$ 的解，同理 x_0+b 也为方程 $x-\ln x=b$ 的解，

所以 $\left\{x_1,x_0\right\}=\left\{x_0-b,x_4-b\right\}$，而 $b>1$，

故 $\begin{cases}x_0=x_4-b\\x_1=x_0-b\end{cases}$ 即 $x_1+x_4=2x_0$.