周南中学 2023 级高一年级第一次月考

数学科试题卷

（考试时间：**120** 分钟　试卷满分：**150** 分）

注意事项：

1. 本试卷分第 **I** 卷（选择题）和第 **II** 卷（非选择题）两部分.答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.

2. 回答第 **I** 卷时，选出每小题答案后，用 **2B** 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再涂选其他答案标号.写在本试卷上无效.

3. 回答第 **II** 卷时，将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.

第 I 卷

一、单项选择题（本题共 **8** 小题，每小题 **5** 分，共 **40** 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

1．若 a，b，c，d 为集合 A 的四个元素，则以 a，b，c，d 为边长构成的四边形可能是(　　)

A．矩形　　B．平行四边形

C．菱形　　D．梯形

【答案】D

【解析】

【详解】由于集合中的元素具有“互异性”，故 a，b，c，d 四个元素互不相同，即组成四边形的四条边互不相等.选 D.

点睛：集合元素的特性：确定性、互异性、无序性．

2．命题“存在 $x\in \mathbf{R}$，$1<f(x)\le 2$”的否定形式是（　　）

A．任意 $x\in \mathbf{R}$，$1<f(x)\le 2$　　B．任意 $x\notin \mathrm{R}$，$f(x)\le 1$或$f(x)>2$

C．任意 $x\notin \mathrm{R}$，$1<f(x)\le 2$　　D．任意 $x\in \mathbf{R}$，$f(x)\le 1$或$f(x)>2$

【答案】D

【解析】

【分析】根据特称命题的否定为全称命题判断即可.

【详解】命题“存在 $x\in \mathbf{R}$，$1<f(x)\le 2$”的否定形式是“任意 $x\in \mathbf{R}$，$f(x)\le 1$或$f(x)>2$”.

故选：D

3．下列各式中：①$\{0\}\in\{0,1,2\}$；②$\{0,1,2\}\subseteq\{2,1,0\}$；③$\varnothing\subseteq\{0,1,2\}$；④$\varnothing=\{0\}$；⑤$\{0,1\}=\{(0,1)\}$；⑥$0=\{0\}$.正确的个数是（　　）

A. 1　　　　B. 2　　　　C. 3　　　　D. 4

【答案】B

【解析】

【分析】根据集合、元素之间的关系，结合集合与集合之间的有关系逐一判断即可.

【详解】①：根据子集的定义可知$\{0\}\subseteq\{0,1,2\}$，显然本序号不正确；

②：根据子集的定义可知$\{0,1,2\}\subseteq\{2,1,0\}$是正确的，显然本序号正确；

③：空集是任何集合的子集，所以本序号正确；

④：空集是任何集合的子集，所以本序号不正确；

⑤：集合$\{0,1\}$是两个元素，$\{(0,1)\}$是单元素集合，这两个集合不可能相等，所以本序号不正确；

⑥：显然 是集合$\{0\}$中的元素，所以$0\in\{0\}$，因此本序号不正确，

正确的个数是2，

故选：B

4. 已知$f(x)=|x|$是集合 *A* 到集合 *B* 的函数，如果集合$B=\{2\}$，那么集合 *A* 不可能是（　　）

A. $\{-2,2\}$　　　　B. $\{-2\}$　　　　C. $\{-1,2\}$　　　　D. $\{2\}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据函数的概念即可求解.

【详解】若集合$A=\{-1,2\}$，则$-1\in A$，但$|-1|=1\notin B$，故选：C.

5．设集合$A=\left\{x \mid y=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x^2-1}\right\}, B=\left\{y \mid y=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x^2-1}\right\}$则集合$A\cup B$的真子集的个数为（　　）

A. 3　　　　B. 4　　　　C. 7　　　　D. 8

【答案】C

【解析】

【分析】分别求出集合A,B及$A\cup B$，根据$A\cup B$中元素个数写出其真子集的个数.

【详解】集合A表示$y=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x^2-1}$的定义域，由$\begin{cases}1-x^2\geq 0\\x^2-1\geq 0\end{cases}$得$x^2=1$，

所以$A=\{-1,1\}$，

集合B表示$y=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x^2-1}$的值域，

因为其定义域为$\{-1,1\}$，故$B=\{0\}$，

所以$A\cup B=\{-1,0,1\}$，

所以集合$A\cup B$的真子集的个数为$2^3-1=7$.

故选：C

6. $\frac{1}{a}+1>0$是$a<-1$成立的（　　）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】B

【解析】

【分析】利用充分条件和必要条件的定义即可判断，进而得出正确答案.

【详解】由$\frac{1}{a}+1>0$即$\frac{1+a}{a}>0$，等价于$a(a+1)>0$，解得: $a>0$或$a<-1$，

由$a>0$或$a<-1$，得不出$a<-1$，

由$a<-1$可得出$a>0$或$a<-1$，

所以$a>0$或$a<-1$是$a<-1$的必要不充分条件，

即$\frac{1}{a}+1>0$是$a<-1$成立的必要不充分条件，

故选：B.

7. 已知命题$p:\exists x\in(1,2), ax>1$成立，若$p$为真命题，则$a$　取值范围为（　　）

A. $a\geq 1$

B. $a>1$

C. $a>\frac{1}{2}$

D. $a\geq\frac{1}{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】分离参数，转化为求函数的值域．

【详解】$x\in(1,2)$，因此由$ax>1$得$a>\frac{1}{x}$，即存在$x\in(1,2)$，$a>\frac{1}{x}$成立，

$x\in(1,2)$时，$\frac{1}{x}\in(\frac{1}{2},1)$，因此$a>\frac{1}{2}$，

故选：C．

8. 已知关于x的一元二次不等式$x^2-8x+a\le 0$的解集中有且仅有 3 个整数，则a的取值范围是（　　）

A. $12<a\le 15$　　　　B. $12\le a\le 15$

C. $12<a<15$　　　　D. $9<a\le 12$

【答案】A

【解析】

【分析】根据二次函数的对称性可得出不等式$x^2-8x+a\le 0$的解集中的整数，可得出关于实数 a 的不等式组，即可求解.

【详解】因为$y=x^2-8x+a$的对称轴为$x=4$，开口向上，

所以若关于 x 的一元二次不等式$x^2-8x+a\le 0$的解集中有且仅有 3 个整数，

则分别为 3，4，5，

则$\begin{cases}3^2-8\times 3+a\le 0\\ 2^2-8\times 2+a>0\end{cases}$，解得$12<a\le 15$.

所以 a 的取值范围是$(12,15]$.

故选：A

二、多项选择题（本题共 **4** 小题，每小题 **5** 分，共 **20** 分**.**在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 **5** 分，部分选对的得 **2** 分，有选错的得 **0** 分）

9. 下列各组函数能表示同一个函数的是（　　）

A. $f(x)=\sqrt{x^2}$，$g(x)=|x|$　　　　B. $f(x)=x$ 与$g(x)=\frac{x^2}{x}$

C. $f(x)=\sqrt{x^2-4}$，$g(x)=\sqrt{x+2}\times\sqrt{x-2}$　　　　D. $f(x)=x^2-2x-1$与$g(t)=t^2-2t-1$

【答案】AD

【解析】

【分析】根据定义域和解析式是否都相同来判断是否同一函数.

【详解】A. $f(x)=\sqrt{x^2}=|x|$，$g(x)=|x|$定义域和解析式都相同，是同一函数；

B. $g(x)=\frac{x^2}{x}$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，$f(x)=x$的定义域为$R$，定义域不同，不是同一函数；

C. $f(x)=\sqrt{x^2-4}$的定义域为$(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$，$g(x)=\sqrt{x+2}\times\sqrt{x-2}$的定义域为$[2,+\infty)$，定义域不同，不是同一函数；

D. $f(x)=x^2-2x-1$，$g(t)=t^2-2t-1$的定义域均为R，解析式都相同，是同一函数.

故选：AD.

10. 若$a<b<0$，$\frac{1}{c}<\frac{1}{d}<0$，则下面四个不等式成立的有（　　）

A. $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$　　B. $|c|>|d|$　　C. $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$　　D. $\frac{a}{a+c}>\frac{b}{b+d}$

【答案】ACD

【解析】

【分析】利用不等式的基本性质直接推导可判断 ABC；先将$\frac{a}{a+c}>\frac{b}{b+d}$等价变形，然后由不等式性质推导可判断 D.

详解】由$a<b<0$可得$-a>-b>0$，所以$\frac{1}{-a}<\frac{1}{-b}$$\therefore\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，故 A 正确；

由$\frac{1}{c}<\frac{1}{d}<0$可得$cd>0$，所以$\frac{1}{c}\times cd<\frac{1}{d}\times cd<0$，即$d<c<0$，$\therefore|c|<|d|$，故 B 不正确；

因为$a<b<0$，$\frac{1}{c}<\frac{1}{d}<0$，所以$-a>-b>0$，$-\frac{1}{c}>-\frac{1}{d}>0$，所以$-a\times(-\frac{1}{c})>-b\times(-\frac{1}{d})>0$，$\therefore$ $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$，故 C 正确；

由题可知$(a+c)(b+d)>0$

由于$\frac{a}{a+c}>\frac{b}{b+d}\Leftrightarrow a(b+d)>b(a+c)\Leftrightarrow ad>bc$，

由上可知$-a>-b>0$，$-d>-c>0$，所以$ad>bc>0$，所以$\frac{a}{a+c}>\frac{b}{b+d}$，故 D 正确；

故选：ACD.

11. $\forall x\in R$，关于 x 的不等式$x^2-ax+a>0$恒成立的一个必要不充分条件是（　　）

A. $0<a<4$　　B. $a>-1$

C. $0<a<\frac{1}{2}$　　D. $a\le 10$

【答案】BD

【解析】

【分析】先求出"$\forall x\in R$，关于 x 的不等式$x^2-ax+a>0$恒成立的充要条件，再根据必要不充分条件的定

义可求出答案.

【详解】当对于$\forall x\in R$，关于 x 的不等式$x^2-ax+a>0$恒成立，

则$\Delta=(-a)^2-4a<0$，得$0<a<4$，

对于 A，是充要条件，所以 A 错误，

对于 B，因为当$0<a<4$时，$a>-1$一定成立，所以$a>-1$是关于 x 的不等式$x^2-ax+a>0$恒成立的一个必要不充分条件，所以 B 正确，

对于 C，因为当$0<a<\frac{1}{2}$时，$0<a<4$成立，所以$0<a<\frac{1}{2}$是关于 x 的不等式$x^2-ax+a>0$恒成立的一个充分不必要条件，所以 C 错误，

对于 D，因为当$0<a<4$时，$a\le 10$一定成立，所以$a\le 10$是关于 x 的不等式$x^2-ax+a>0$恒成立的一个必要不充分条件，所以 D 正确，

故选：BD.

12．下列说法正确的有（　　）

A. $y=\frac{x^2+1}{x}$的最小值为 2

B. 已知$x>1$，则$y=2x+\frac{4}{x-1}-1$的最小值为$4\sqrt{2}+1$

C. 若正数x,y为实数，若$x+2y=3xy$，则$2x+y$的最小值为 3

D. 设x,y为正数，若$9x^2+y^2-3xy=1$，则$3x+y$的最大值为 2

【答案】BCD

【解析】

【分析】利用基本不等式求最值判断.

【详解】选项 A，当$x<0$时，$y=\frac{x^2+1}{x}<0$，A 错；

选项 B，$x>1$，则$x-1>0$，$y=2x+\frac{4}{x-1}-1=2(x-1)+\frac{4}{x-1}+1\ge 2\sqrt{2(x-1)\times\frac{4}{x-1}}+1=4\sqrt{2}+1$，当且仅当$2(x-1)=\frac{4}{x-1}$，即$x=1+\sqrt{2}$时等号成立，B 正确；

选项 C，x,y是正数，$x+2y=3xy\Rightarrow\frac{1}{y}+\frac{2}{x}=3$，

$2x+y=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{y}+\frac{2}{x}\right)(2x+y)=\frac{1}{3}\left(5+\frac{2x}{y}+\frac{2y}{x}\right)\geq\frac{1}{3}\left(5+2\sqrt{\frac{2x}{y}\times\frac{2y}{x}}\right)=3$，当且仅当$\frac{2x}{y}=\frac{2y}{x}$，即

$x=y=1$时等号成立，C 正确；

选项 D， x,y为正数，若$9x^2+y^2-3xy=1$，$(3x+y)^2-1=9xy\leq 3\times(\frac{3x+y}{2})^2$，解得$3x+y\leq 2$，当且仅当$3x=y=1$时等号成立，D 正确，

故选：BCD．

第 II 卷

三、填空题（本题共 **4** 小题，每小题 **5** 分，共 **20** 分）

13. 设全集 U＝M∪N＝{1，2，3，4，5}，M∩$\complement_U$N＝{2，4}，则 N＝________．

【答案】$\{1,3,5\}$

【解析】

【详解】M∪N 元素去掉 M∩$\complement_U$N 元素得 N＝{1，3，5}

14. 若不等式$2ax^2+ax-2<0$对一切实数x都成立，则实数a的取值范围是___________.

【答案】$(-16,0]$

【解析】

【分析】根据题意，分$a=0$和$a\neq 0$，两种情况讨论，结合二次函数的性质，列出不等式组，即可求解.

【详解】解：不等式$2ax^2+ax-2<0$对一切实数x都成立，

当$a=0$时，不等式为$-2<0$，显然成立；

当$a\neq 0$时，要使得$2ax^2+ax-2<0$对一切实数x都成立，

则满足$\begin{cases}2a<0\\ \Delta=a^2+16a<0\end{cases}$，解得$-16<a<0$，

综上可得，实数a的取值范围是$(-16,0]$.

故答案为：$(-16,0]$.

15. 已知集合$M=\{1,2,3,4\}$，$A\subseteq M$，集合A中所有元素的乘积称为集合A的“累积值”，且规定：当集合 A 只有一个元素时，其累积值即为该元素的数值，空集的累积值为 0.当集合A的累积值是偶数时，这样的集合A共有________个．

【答案】13

【解析】

【分析】理解新定义，再利用间接法与集合子集个数的求法即可得解.

【详解】因为$A\subseteq M$，且集合$M=\{1,2,3,4\}$的子集有$2^4=16$个，

其中“累积值”为奇数的子集为$\{1\},\{3\},\{1,3\}$共 3 个，

故“累积值”为偶数的集合有$16-3=13$个.

故答案为：13.

16. 若不等式$x^2-2mx+3m-6>0$对一切$m\in[-2,1]$恒成立，则实数 x 的取值范围是______.

【答案】$(-\infty,-6)\cup(3,+\infty)$

【解析】

【分析】利用变换主元法将m看成自变量，将x看成参数即可求解.

【详解】解：不等式$x^2-2mx+3m-6>0$对一切$m\in[-2,1]$恒成立

将m看成自变量，将x看成参数，将不等式化为：

$(3-2x)m+x^2-6>0$对一切$m\in[-2,1]$恒成立

令$g(m)=(3-2x)m+x^2-6$

即$g(m)>0$对一切$m\in[-2,1]$恒成立

等价于$\begin{cases}g(-2)>0\\g(1)>0\end{cases}$即$\begin{cases}x^2+4x-12>0\\x^2-2x-3>0\end{cases}$

解得：$x>3$或$x<-6$

所以实数 x 的取值范围是：$x\in(-\infty,-6)\cup(3,+\infty)$

【点睛】关键点睛：当所给不等式或者等式有两个变量时，将已知变量看成自变量，所求变量看成参数，即变换主元法进行求解.

四、解答题（本题共 **6** 小题，共 **70** 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17. （1）已知$-1<x<1,0<y<2$，求$2x-3y$的取值范围.

（2）设$x,y\in R$，证明：$(x^2-y^2)^2\ge xy(x-y)^2$

【答案】（1）$(-8,2)$；（2）证明见解析.

【解析】

【分析】（1）根据不等式的性质求解；

（2）作差法比较大小.

【详解】（1）因为$-1<x<1, 0<y<2$，

所以$-2<2x<2, -6<-3y<0$，

两不等式相加，得$-8<2x-3y<2$，

所以$2x-3y$的取值范围为$(-8,2)$.

（2）$\left(x^2-y^2\right)^2-xy(x-y)^2=\left(x+y\right)^2\left(x-y\right)^2-xy(x-y)^2$

$=(x-y)^2\left[\left(x+y\right)^2-xy\right]$

$=(x-y)^2\left(x^2+y^2+xy\right)$

$=(x-y)^2\left[\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2\right]$

因为$(x-y)^2\geq 0, \left(x+\frac{y}{2}\right)^2\geq 0, \frac{3}{4}y^2\geq 0$，

所以$\left(x^2-y^2\right)^2-xy(x-y)^2\geq 0$，

所以$\left(x^2-y^2\right)^2\geq xy(x-y)^2$.

18. 已知集合$A=\{x \mid a-2<x<2a+1\}, B=\{x \mid 0<x<7\}, U=\mathbf{R}$.

（1）若$a=1$，求$A\cup B, A\cap\left(\complement_U B\right)$；

（2）若$A\subseteq B$，求实数a的取值范围.

【答案】（1）$A\cup B=\{x \mid -1<x<7\}$，$A\cap\left(\complement_U B\right)=\{x \mid -1<x\leq 0\}$

（2）$\{a \mid a\leq -3\}\cup\{a \mid 2\leq a\leq 3\}$

【解析】

【分析】（1）根据集合并集、补集、交集的定义进行求解即可；

（2）根据子集的定义，结合集合是否为空集分类讨论进行求解即可.

【小问 1 详解】

若$a=1$，$A=\{x \mid -1<x<3\}$，

所以$A\cup B=\{x \mid -1<x<7\}$，

因为$B=\{x \mid 0<x<7\}, U=\mathbf{R}$

$\complement_U B=\{x|x\le 0$ 或 $x\ge 7\}$，

所以 $A\cap(\complement_U B)=\{x|-1\le x\le 0\}$；

【小问 2 详解】

当 $a-2\ge 2a+1$ 时，即当 $a\le -3$ 时，$A=\varnothing$，显然 $A\subseteq B$ 成立；

当 $a-2<2a+1$ 时，即当 $a>-3$ 时，$A\ne\varnothing$，要想 $A\subseteq B$，

只需 $\begin{cases}2a+1\le 7\\ a-2\ge 0\end{cases}\Rightarrow 2\le a\le 3$，显然满足 $a>-3$，

综上所述：实数 a 的取值范围 $\{a|a\le -3\}\cup\{a|2\le a\le 3\}$．

19. 甲、乙两位消费者同时两次购买同一种物品，分别采用两种不同的策略，甲的策略是不考虑物品价格的升降，每次购买这种物品的数量一定；乙的策略是不考虑物品价格的升降，每次购买这种物品所花的钱数一定．设甲每次购买这种物品的数量为 m，乙每次购买这种物品所花的钱数为 n．

（1） 若两次购买这种物品的价格分别为 6 元，4 元，求甲两次购买这种物品平均价格和乙两次购买这种物品平均价格分别为多少；

（2） 设两次购买这种物品的价格分别为 p_1 元，p_2 元（$p_1>0$，$p_2>0$，且 $p_1\ne p_2$），甲两次购物的平均价格记为 Q_1，乙两次购物的平均价格记为 Q_2．通过比较 Q_1，Q_2 的大小，说明问甲、乙谁的购物策略比较经济合算．

【答案】（1） ；$\frac{24}{5}$

（2）第二种购物方式比较划算．

【解析】

【分析】（1）甲每次购买这种物品的数量为 m，乙每次购买这种物品所花的钱数为 n，由两次所花钱数除以购物数量可得平均价格；

（2）利用平均数计算公式，分别计算出平均数，即可表示出来．再利用作差法比较两种购物方式中，哪种划算．

【小问 1 详解】

设甲每次购买这种物品的数量为 m，乙每次购买这种物品所花的钱数为 n，

所以甲两次购买这种物品平均价格为：$\frac{6m+4m}{m+m}=5$，

乙两次购买这种物品平均价格为：$\dfrac{2n}{\frac{n}{6}+\frac{n}{4}}=\frac{24}{5}$；

【小问 2 详解】

甲两次购物时购物量均为 m，则两次购物总花费为 p_1m+p_2m ，

购物总量为 $2m$ ，平均价格为 $Q_1=\dfrac{p_1m+p_2m}{2m}=\dfrac{p_1+p_2}{2}$.

设乙两次购物时用去的钱数均为 n ，则两次购物总花费 $2n$ ，购物总量为 $\dfrac{n}{p_1}+\dfrac{n}{p_2}$ ，

平均价格为 $Q_2=\dfrac{2n}{\dfrac{n}{p_1}+\dfrac{n}{p_2}}=\dfrac{2p_1p_2}{p_1+p_2}$ ，$\therefore$ $Q_1=\dfrac{p_1+p_2}{2},Q_2=\dfrac{2p_1p_2}{p_1+p_2}$

$\because p_1\neq p_2$ ，$\therefore$ $Q_1-Q_2=\dfrac{p_1+p_2}{2}-\dfrac{2p_1p2}{p_1+p_2}=\dfrac{(p_1-p_2)^2}{2(p_1+p_2)}>0$ ，

$\therefore$ $Q_1>Q_2$ ，

故：第二种购物方式比较划算．

20. 已知关于 x 的不等式 $(ax-1)(x+1)>0$ ，$a\in R$.

（1） 若此不等式的解集为空集，求实数 a 的取值集合；

（2） 求这个关于 x 的不等式的解集.

【答案】（1）$\{-1\}$ ；

（2）答案见解析.

【解析】

【分析】（1）由条件可得 $a<0$ ，且方程 $(ax-1)(x+1)=0$ 的两解相等，然后可得答案；

（2）分 $a>0$ 、$a=0$ 、$-1<a<0$ 、$a=-1$ 、$a<-1$ 五种情况讨论即可.

【小问 1 详解】

要使不等式 $(ax-1)(x+1)>0$ 的解集为空集，

则有 $a<0$ ，且方程 $(ax-1)(x+1)=0$ 的两解相等，所以 $\dfrac{1}{a}=-1$ ，即 $a=-1$ ，

所以实数 a 的取值集合为 $\{-1\}$.

【小问 2 详解】

当 $a=0$ 时，不等式 $(ax-1)(x+1)>0$ 为 $-(x+1)>0$ ，解得 $x<-1$ ，即解集为 $(-\infty,-1)$ ，

当 $a\neq 0$ 时，方程 $(ax-1)(x+1)=0$ 的解为 $\dfrac{1}{a}$ 、-1 ，

所以当 $a>0$ 时，不等式的解集为 $(-\infty,-1)\cup\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$，

当 $-1<a<0$ 时，不等式的解集为 $\left(\frac{1}{a},-1\right)$，

当 $a=-1$ 时，不等式的解集为 $\varnothing$，

当 $a<-1$ 时，不等式的解集为 $\left(-1,\frac{1}{a}\right)$，

综上：当 $a>0$ 时，不等式的解集为 $(-\infty,-1)\cup\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$，

当 $a=0$ 时，不等式的解集为 $(-\infty,-1)$，

当 $-1<a<0$ 时，不等式的解集为 $\left(\frac{1}{a},-1\right)$，

当 $a=-1$ 时，不等式的解集为 $\varnothing$，

当 $a<-1$ 时，不等式的解集为 $\left(-1,\frac{1}{a}\right)$.

21．二次函数 $f(x)=ax^2-2ax+b+1(a>0)$ 在区间 $[0,3]$ 上有最大值 4，最小值 0．

（1） 求函数 $f(x)$ 的解析式；

（2） 设 $g(x)=f(x)-4x-mx^2$，若 $g(x)\le 0$ 在 $x\in\left[\frac{1}{7},7\right]$ 时恒成立，求 m 取值范围．

【答案】（1） $f(x)=x^2-2x+1$

（2） $m\ge 8$

【解析】

【分析】（1）根据二次函数的性质得其对称轴 $x=1\in[0,3]$，$f(x)_{\min}=f(1)$，$f(x)_{\max}=f(3)$，建立方程组，求解可得函数的解析式；

（2）由（1）得 $m\ge\left(\frac{1}{x}\right)^2-6\times\frac{1}{x}+1$ 在 $x\in\left[\frac{1}{7},7\right]$ 时恒成立，由二次函数的性质和恒成立思想可求得范围.

【小问 1 详解】

解：由题 $f(x)=ax^2-2ax+b+1(a>0)$，得其对称轴 $x=1\in[0,3]$，

所以$\begin{cases} f(x)_{\min}=f(1)=-a+b+1=0 \\ f(x)_{\max}=f(3)=3a+b+1=4 \end{cases}$，解得：$a=1$，$b=0$，所以 $f(x)=x^2-2x+1$.

【小问 2 详解】

解：由（1）得 $g(x)=(1-m)x^2-6x+1$，所以 $g(x)\le 0$ 等价于 $m\ge\left(\frac{1}{x}\right)^2-6\times\frac{1}{x}+1$ 在 $x\in\left[\frac{1}{7},7\right]$ 时恒成立，

设 $t=\frac{1}{x}\in\left[\frac{1}{7},7\right]$，即 $m\ge t^2-6t+1=(t-3)^2-8$ $t\in\left[\frac{1}{7},7\right]$ 上恒成立，

又 $-8\le(t-3)^2-8\le 8$，所以 $m\ge 8$.

22. 已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$.

（1） 若 $f(x)>0$ 的解集为 $\{x|-3<x<4\}$，解关于 x 的不等式 $bx^2+2ax-(c+3b)<0$；

（2） 已知 $b=4, a>c$，若 $f(x)\ge 0$ 对于一切实数 x 恒成立，并且存在 $x_0\in R$，使得 $ax_0^2+bx_0+c=0$ 成立，求 $\frac{4a^2+c^2}{2a-c}$ 的最小值.

【答案】（1）$(-3,5)$

（2）

【解析】

【分析】（1）根据一元二次不等式解集的性质，结合一元二次不等式的解法进行求解即可；

（2）根据二次函数的性质，结合一元二次方程根的判别式、基本不等式进行求解即可.

小问 1 详解】

因为 $f(x)>0$ 的解集为 $\{x|-3<x<4\}$，

所以$\begin{cases} a<0 \\ -3+4=-\frac{b}{a} \\ -3\times 4=\frac{c}{a} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} b=-a \\ c=-12a \end{cases}$，

所以 $-ax^2+2ax-(-12a-3a)<0\Rightarrow -ax^2+2ax+15a<0\Rightarrow x^2-2x-15<0$

$\Rightarrow -3<x<5$，

所以关于x的不等式$bx^2+2ax-(c+3b)<0$的解集为$(-3,5)$；

【小问 2 详解】

当$b=4$时，$f(x)=ax^2+4x+c$，

因为$f(x)\geq 0$对于一切实数x恒成立，

所以$\begin{cases} a>0 \\ \Delta=4^2-4ac\leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a>0 \\ ac\geq 4 \end{cases}$，

因为存在$x_0\in\mathbb{R}$，使得$ax_0^2+bx_0+c=0$成立，

所以$4^2-4ac\geq 0$，即$ac\leq 4$，而$ac\geq 4$所以有$ac=4$，

因为$a>0$，$a>c$，

所以$\dfrac{4a^2+c^2}{2a-c}=\dfrac{(2a-c)^2+4ac}{2a-c}=(2a-c)+\dfrac{16}{2a-c}\geq 2\sqrt{(2a-c)\cdot\dfrac{16}{2a-c}}=8$，

当且仅当$2a-c=\dfrac{16}{2a-c}$时取等号，即当$a=1+\sqrt{3},c=2\sqrt{3}-2$取等号，

$\dfrac{4a^2+c^2}{2a-c}$的最小值为

【点睛】关键点睛：本题的关键是利用一元二次不等式的解集与一元二次方程解的关系，以及利用基本不等式.